This question paper contains 19 printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY ★ Kalkaji, New Delhi-19 2019 (4) J C

S. No. of Question Paper : **3547**

Unique Paper Code : **12271102**

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics—I**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : **I**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

There are *five* questions in all.

All questions are compulsory.

A simple calculator can be used.

कुल **पाँच** प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

P.T.O.

StudentSuvidha.com downloaded from

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

1. Answer any *two* of the following : 2×4=8

(A) Let $f(x)$ be a function with domain [–2, 3] and range [0, 8]. What are the domains and ranges of the following functions ?

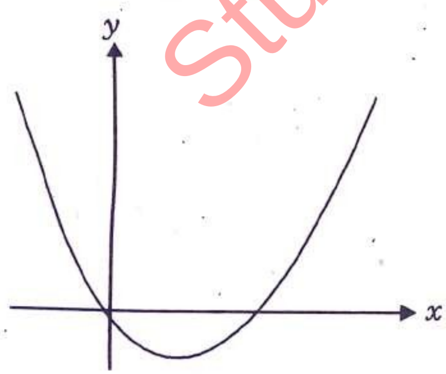
(*i*) $-f(-x-1)$

(*ii*) $4\,f^{-1}(-x)+1$.

(B) The given figure shows the graph of the function :

$$y = g(x) = px^2 + qx + r.$$

(*i*) Check which of the constants *p*, *q* and *r* are > 0, = 0, or < 0.



$y = g(x) = px^2 + qx + r$

(*ii*) The graph is symmetric about the line $x = k$. Find *k*.

(C) Determine the direction of logical conclusion (P → Q or Q → P or P ↔ Q) in case of the follow[ing] propositions :

(*i*) P : The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.

Q : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*ii*) P : $x^2 > 16$

Q : $x > 4$

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(A) मान लीजिए कि $f(x)$, परास (domain) [–2, 3] व प[रिसर] (range) [0, 8] वाला एक फलन है। निम्नलिखित फ[लनों] के क्या परास व परिसर हैं ?

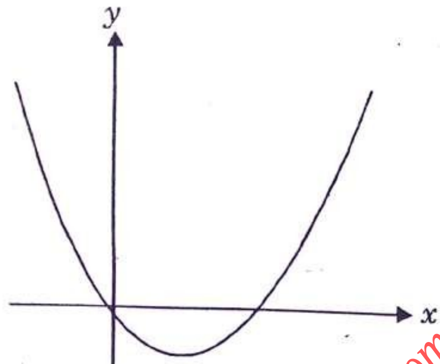
(*i*) $-f(-x-1)$

(*ii*) $4\,f^{-1}(-x)+1$.

(B) निम्नलिखित चित्र फलन $y = g(x) = px^2 + qx$ [...] का आरेख दर्शाता है :

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(*i*) जाँच कीजिए कि स्थिरांकों p, q व r में से कौन-कौनसे > 0, $= 0$ व < 0 हैं।



$y = g(x) = px^2 + qx + r$

(*ii*) यह आरेख रेखा $x = k$ के प्रति सममित (symmetric) है। k का मान ज्ञात कीजिए।

(C) निम्नलिखित कथनों हेतु तार्किक निष्कर्ष (logical conclusion) की दिशा (P → Q या Q → P या P ↔ Q) ज्ञात कीजिए :

(*i*) P : श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी (convergent) है।

Q : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*ii*) P : $x^2 > 16$

Q : $x > 4$

2. Answer any *three* of the following : $3\times4=12$

(A) Find the equations of the tangent lines to the curve $y=\frac{x-1}{x+1}$ parallel to the line $x - 2y = 2$.

(B) Find the asymptotes of the following functions :

(*i*) $y=e^{\frac{1}{1+x}}$

(*ii*) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$.

(C) (*i*) Evaluate the following limit $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e^{x-1}}{x^2}$.

(*ii*) Consider the infinite series $1+\left(\frac{2x}{3}\right)+\left(\frac{2x}{3}\right)^2+\left(\frac{2x}{3}\right)^3+\ldots$ .For what values of x does the series converge ? Find the sum of the series if $x = 1.2$.

(D) Approximate the function $f(x) = x^{1/3}$ by a Taylor polynomial of degree 2 at $x_0 = 8$. Use it to find an approximate value of $9^{1/3}$. Find an upper bound for the error of approximation corresponding to the result obtained.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(A) वक्र $y = \frac{x-1}{x+1}$ की रेखा $x - 2y = 2$ के समानान्तर (parallel) स्पर्श रेखाओं (tangents) के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(B) निम्नलिखित फलनों की अनन्तस्पर्शियाँ (asymptotes) ज्ञात कीजिए :

(i) $y = e^{\frac{1}{1+x}}$

(ii) $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$.

(C) (i) सीमा $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x+1} - e^{x-1}}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) अनन्त श्रेणी $1 + \left(\frac{2x}{3}\right) + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \ldots$ पर विचार कीजिए। x के किन मानों हेतु यह श्रेणी अभिसृत (converge) होती है ? यदि $x = 1.2$ हो तो श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए।

(D) फलन $f(x) = x^{1/3}$ को $x_0 = 8$ पर कोटि (degree) 2 के टेलर बहुपद (Taylor polynomial) से सन्निकटित (approximate) कीजिए। इसकी सहायता से $9^{1/3}$ का सन्निकट मान (approximate value) ज्ञात कीजिए। प्राप्त परिणाम के संगत सन्निकटन त्रुटि (error of approximation) हेतु ऊपरी सीमा (upper bond) ज्ञात कीजिए।

3. Answer any *four* of the following : 4×5=20

(A) Graph the function $g(x)$ and check its continuity at $x = 1$ and $x = -1$.

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{if } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{if } -1 \le x \le 1 \\ x + 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

(B) (i) If $y\sqrt{x^2+1} = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ show that :

(a) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy - 1 = 0$

(b) $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(ii) Find the point(s) of inflection of the function $f(x) = xe^{-x}$.

(C) (i) Let f be twice differentiable on [0, 2], show that if $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, then there is an $x_0 \in (0, 2)$ such that $f''(x) = 0$.

(ii) Graph the function $y = |x^2 - 1|$.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(D) (*i*) Find the expression for elasticity of $h(x) = f(x)^{g(x)}$ in terms of E_f and E_g, the elasticities of $f(x)$ and $g(x)$ w.r.t x respectively.

(*ii*) Prove that $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3$ has a unique solution in the interval (1, 4).

(E) (*a*) Suppose that the interest rate '*r*' such that the present value of receiving Rs. A_2 in t_2 years from now is the same as receiving Rs. A_1 in t_1 years from now, given that $t_2 > t_1$. Assuming interest is compounded annually :

(*i*) Show that $A_2 > A_1$

(*ii*) Show that the present value of receiving Rs. A_2, $(t_2 + k)$ years from now is equal to the present value of receiving Rs. A_1, $(t_1 + k)$ years from now.

(*b*) The equation $3xe^{xy^2} - 2y = 3x^2 + y^2$ defines y as a differentiable function of x about the point $(x, y) = (1, 0)$. What is the linear approximation to y about x?

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(A) फलन $g(x)$ का आरेख बनाइए तथा इसकी x $x = -1$ पर सांतत्य (continuity) हेतु जाँच कीजि

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ if } x < -1 \\ x^2+1 \text{ if } -1 \le x \le 1 \\ x + 1 \text{ if } x > 1 \end{cases}.$$

(B) (*i*) यदि $y\sqrt{x^2+1} = \log(x + \sqrt{x^2+1})$, हो, तो द कि :

(*a*) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy - 1 = 0$

(*b*) $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(*ii*) फलन $f(x) = xe^{-x}$. के मोड़ बिन्दुओं (point inflection) को ज्ञात कीजिए।

(C) (*i*) मान लीजिए कि f [0, 2] पर दो बार अवकल (differentiable) है। दर्शाइए कि यदि $f(0)$ = $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, तो एक ऐसा $x_0 \in (0, 2$ जिसके लिए $f''(x) = 0$ ।

(*ii*) फलन $y = |x^2 - 1|$ का आरेख बनाइए।

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(D) (*i*) $h(x) = f(x)^{g(x)}$ की लोच (elasticity) हेतु $f(x)$ व $g(x)$ की x के सापेक्ष लोचों, क्रमशः E_f व E_g, के पदों में व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

(*ii*) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3$ का अन्तराल (1, 4) में एक अद्वितीय (unique) हल है।

(E) (*a*) मान लीजिए कि 'r' वह ब्याज दर है जिस पर अब से t_2 वर्षों में प्राप्त होने वाली A_2 रु. की राशि का वर्तमान मूल्य (present value) अब से t_1 वर्षों में प्राप्त होने वाली A_1 रु. की राशि के वर्तमान मूल्य के बराबर है, जहाँ $t_2 > t_1$ यह मानते हुए कि ब्याज में वार्षिक चक्रवृद्धि (Compounded annually) होती है :

(*i*) दर्शाइए कि $A_2 > A_1$

(*ii*) दर्शाइए कि अब से $(t_2 + k)$ वर्षों में प्राप्त होने वाले A_2 रु. का वर्तमान मूल्य अब से $(t_1 + k)$ वर्षों में प्राप्त होने वाले A_1 रु. के वर्तमान मूल्य के बराबर होगा।

(*b*) समीकरण $3xe^{xy^2} - 2y = 3x^2 + y^2$, y को बिन्दु $(x, y) = (1, 0)$ के आस-पास x के अवकलनीय फलन के रूप में परिभाषित करता है। y का x के आस-पास रेखीय सन्निकटन (linear approximation) क्या है ?

4. Answer any *two* of the following : 2×7.5=15

(A) (*i*) For $f(x) = 3x(x + 4)^{2/3}$ find the global extreme points on the interval [–5, –1].

(*ii*) If f is a one-to-one twice differentiable function with inverse g, show that $g''(x) = -\dfrac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$.

Show that if f is increasing and concave its inverse is convex.

(B) (*i*) Show that the function $f(x) = ax^2 + bx + c$ is concave if $a \le 0$ and convex if $a \ge 0$ without using derivatives.

(*ii*) Let $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{4 + e^{3x}}$. Find the intervals on which the function is increasing and/or decreasing.

P.T.O.

StudentSuvidha.com
downloaded from
Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(C) (*i*) The curve C_1 passes through the origin in the x-y plane and its gradient is given by $\frac{dy}{dx} = x(1-x^2)e^{-x^2}$. Find its stationary points and classify them as maximum or minimum points.

(*ii*) A coin and stamp dealer estimates that the value of V(t) of his collection (in lakhs of rupees) increases over time according to the following function $V(t) = 1000e^{\sqrt{\frac{t}{4}}}$. If rate of interest is 8% compounded annually, find optimal time t^* for the coin and stamp dealer to sell his collection such that the present value of the collection is maximised (second order condition for optimum need not be verified). How does a change in the discount rate change the optimal time t^* ?

StudentSuvidha.com

downloaded from

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(A) (*i*) $f(x) = 3x(x+4)^{2/3}$ हेतु अन्तराल [–5, –1] में वैश्वि
(global) चरम बिन्दु (extreme points) ज्ञात कीजि

(*ii*) यदि f एक-से-एक (one-to-one), दो
अवकलनीय फलन है जिसका प्रतिलोम (inv
g है, तो दर्शाइए कि $g''(x) = -\frac{f''(g(x}{(f'(g(x}$
दर्शाइए कि यदि f वर्द्धमान (increasing) तथा अ
(concave) है तो इसका प्रतिलोम उत्तल (co
है।

(B) (*i*) बिना अवकलजों की सहायता के दर्शाइए कि
$f(x) = ax^2 + bx + c$ अवतल है यदि $a \le 0$
उत्तल है यदि $a \ge 0$.

(*ii*) मान लीजिए कि $f(x) = \frac{e^{2x}}{4+e^{3x}}$ । वे अन्तराल
कीजिए जिनमें यह फलन वर्द्धमान (incre
तथा/अथवा ह्रासमान (decreasing) है।

(C) (*i*) वक्र C_1 x-y समतल में मूल बिन्दु (origin) से
है तथा इसका ढाल (gradient) $\frac{dy}{dx} = x(1-x^2)e$

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

इसके स्थिर बिन्दुओं (stationary points) को ज्ञात कीजिए तथा उन्हें उच्चिष्ठ (maximum) या निम्निष्ठ (minimum) के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

(*ii*) सिक्कों व डाक टिकटों के एक व्यापारी का आकलन है कि उसके संग्रह का मूल्य V(*t*) (लाख रुपयों में) समय के साथ फलन $V(t) = 1000e^{\sqrt{\frac{t}{4}}}$ के अनुसार बढ़ता है। यदि ब्याज दर 8% है, वार्षिक चक्रवृद्धि के साथ, तो इस व्यापारी के लिए अपने संग्रह को बेचने का इष्टतम (optimal) समय t^* ज्ञात कीजिए जिस पर इसके संग्रह का वर्तमान मूल्य अधिकतम हो (इष्टतम हेतु द्वितीय क्रम की शर्त को सत्यापित करने की आवश्यकता नहीं है)। बट्टे की दर (discount rate) में परिवर्तन इष्टतम समय t^* को किस प्रकार परिवर्तित करता है ?

downloaded from StudentSuvidha.com

5. Answer any *four* of the following : 4×5=20

(A) (*i*) Show that for any *two* $n \times n$ matrices A and B, tr(AB) = tr(BA), where tr(A) denotes the trace of a $n \times n$ matrix A.

(*ii*) Find the rank of the following matrix for all values of the parameter λ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7-\lambda \\ 2 & \lambda & -6 \end{pmatrix}.$$

(B) (*i*) Solve the following system of equations :

$$X - Y + Z = 0$$

$$X + 2Y - Z = 0$$

$$2X + Y + 3Z = 0$$

(*ii*) What are degrees of freedom ? Determine the number of degrees of freedom of the above system of equations.

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(C) Given that $\{u, v, w\}$ is a linearly independent set of vectors in some vector space V, prove that :

(i) the set $\{u, v\}$ is linearly independent.

(ii) the set $\{u, u + v\}$ is linearly independent.

(iii) the set $\{u + v, v + w\}$ is linearly independent.

(D) Consider the following system of equations :

$$-m_1 x + y = b_1$$

$$-m_2 x + y = b_2$$

(i) Prove that if $m_1 \neq m_2$, then the system of equations has exactly one solution. Find the solution.

(ii) Suppose that $m_1 = m_2$. Then under what conditions will the system of equations be consistent ?

(E) (i) Let v be any vector of length 3. Let $A = (v, 2v, 3v)$ be the 3×3 matrix with columns $v, 2v, 3v$. Prove that A is singular.

(ii) Find equation of the line formed at intersections of the two planes :

$$X - 5Y + 3Z = 11 \text{ and } -3X + 2Y - 2Z = -7.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(A) (i) दर्शाइए कि किन्हीं दो $n \times n$ मैट्रिक्स A व B हेतु, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, जहाँ $\text{tr}(A)$, $n \times n$ मैट्रिक्स A के ट्रेस (trace) को व्यक्त करता है।

(ii) प्राचल (parameter) λ के सभी मानों हेतु निम्नलिखित मैट्रिक्स की कोटि (rank) ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7-\lambda \\ 2 & \lambda & -6 \end{pmatrix}.$$

(B) (i) निम्नलिखित समीकरण निकाय (system of equations) को हल कीजिए :

$$X - Y + Z = 0$$

$$X + 2Y - Z = 0$$

$$2X + Y + 3Z = 0$$

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(*ii*) स्वातन्त्र्य कोटियाँ (degrees of freedom) क्या होती हैं ? उपर्युक्त समीकरण निकाय की स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(C) यदि यह दिया हुआ है कि $\{u, v, w\}$ किसी सदिश समष्टि (vector space) V में रैखिकतः स्वतन्त्र (linearly independent) सदिशों (vectors) का एक समुच्चय है तो सिद्ध कीजिए कि :

(*i*) समुच्चय $\{u, v\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(*ii*) समुच्चय $\{u, u + v\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(*iii*) समुच्चय $\{u + v, v + w\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(D) निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए :

$$-m_1x + y = b_1$$

$$-m_2x + y = b_2$$

(*i*) दर्शाइए कि यदि $m_1 \neq m_2$, तो समीकरण निकाय का ठीक एक हल है। इस हल को ज्ञात कीजिए।

(*ii*) दर्शाइए कि यदि $m_1 = m_2$ तो किन शर्तों के अधीन यह समीकरण निकाय संगत (consistent) होगा ?

(E) (*i*) मान लीजिए कि v, लम्बाई 3 का कोई सदिश है। मान लीजिए कि $A = (v, 2v, 3v)$ एक 3×3 मैट्रिक्स है जिसके स्तम्भ $v, 2v, 3v$ हैं। सिद्ध कीजिए कि A विलक्षण (singular) है।

(*ii*) समतलों $X - 5Y + 3Z = 11$ व $-3X + 2Y - 2Z = -7$ के प्रतिच्छेदन (intersection) पर निर्मित रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

StudentSuvidha.com downloaded from

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com